

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ القاسم المشترك الأكبر الموافقات في $\mathbb{Z}$	الرياضيات شعبة رياضي و تقني رياضي الأستاذ عبد الحميد بوقطوف 05 56 24 69 06	التعداد ذو الأساس x الأعداد الأولية المضاعف المشترك الأصغر القواسم والمضاعفات

تخطيط.. إلتزام.. نجاح

● قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a .

◄ نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b.

◄ في $\mathbb{Z}$، للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

● خواص:

خاصية1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

خاصية2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb

خاصية3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb

خاصية4: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n، a يقسم $mb+nc$

● القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

◄ تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

◄ يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

◄ يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b. ونحصل على:
$a = bq + r$ و $0 \leq r \leq |b|$.

● القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

◄ مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .
$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
و نرمز له بــ $PGCD(a;b)$.

◄ $PGCD(a\,;a) = a$

◄ $PGCD(1\,;a) = 1$

◄ $PGCD(0\,;a) = a$ (a غير معدوم)

◄ مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

• خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b .
$PGCD(a;b)= PGCD(b;r)$

خاصية2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

خاصية3: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم.
$PGCD(ka;kb)= k \times PGCD(a;b)$

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.
يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

خاصية4: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b. نضع $a= da'$ و $b= db'$
يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

• تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d= PGCD(|a|;|b|)$.

خاصية: a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم.
$PGCD(ka;kb)= |k|\,PGCD(a;b)$

◄ a و b عددان صحيحان غير معدومين.
إذا كان b يقسم a فإن: $PGCD(a\,;b) = |b|$

تـخـطـيـط.. إلـتـزام.. نـجـاح

● الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n. و نرمز $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n .

◄ من أجل كل عدد صحيح x، $x \equiv 0[1]$.

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n ، إذا و فقط إذا كان $b-a$ مضاعف لـــ n .

نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $b-a$ مضاعف لـــ n .

● خواص:

خاصية1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$.
كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n .

خاصية2: n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$.

خاصية3: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.

خاصية4: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة. إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$ فإن $a \equiv c[n]$.

خاصية5: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:
إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ فإن $a+c \equiv b+d[n]$.

خاصية6: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:
إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ فإن $ac \equiv bd[n]$.

خاصية7: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.
من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.

خاصية8: n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

● التعداد:

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث
$0 < q < x$ و $0 \leq r_a < x$ مع $a \in \{0;1;2;\ldots\ldots;n-1\}$

تخطيط.. إلتزام... نجاح

تخطيط.. إلتزام... نجاح

• التعداد ذو الأساس x:

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $x \geq a$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث

$0 < q < x$ و $0 \leq r_a < x$ مع $a \in \{0;1;2;.....;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}...r_1r_0}$.

الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}...r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x. إذا كان $x = 10$ ، نكتب :

$a = qr_{n-1}r_{n-2}...r_1r_0$

• الأعداد الأولية:

تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم.
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1.
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد.
- 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25.

• خواص:

خاصية1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا .

خاصية2: كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل قاسما أوّليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية3: مجموعة الأعداد الأوّلية غير منتهية .

طريقة: لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ أوّليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .

* إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف و نقرّ أنّ n غير أولي .
* إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أنّ n أولي .

• تحلل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أوّلي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية .

- نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a.

طريقة: لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية . إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها .

● المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b.
$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b
يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.
و نرمز له $PPCM(a;b)$.

◄ المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0.
◄ $PPCM(a\,;a) = a$.
◄ $PPCM(1\,;a) = a$.
◄ مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.

● تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|;|b|)$.

● خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.
$PPCM(ka;kb) = |k|\,PPCM(a;b)$.

● حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس .

● حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية: المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.

● العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر:

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر . بعبارة أخرى $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$

● مبرهنة بيزو:

مبرهنة: يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :
$$au + bv = 1$$

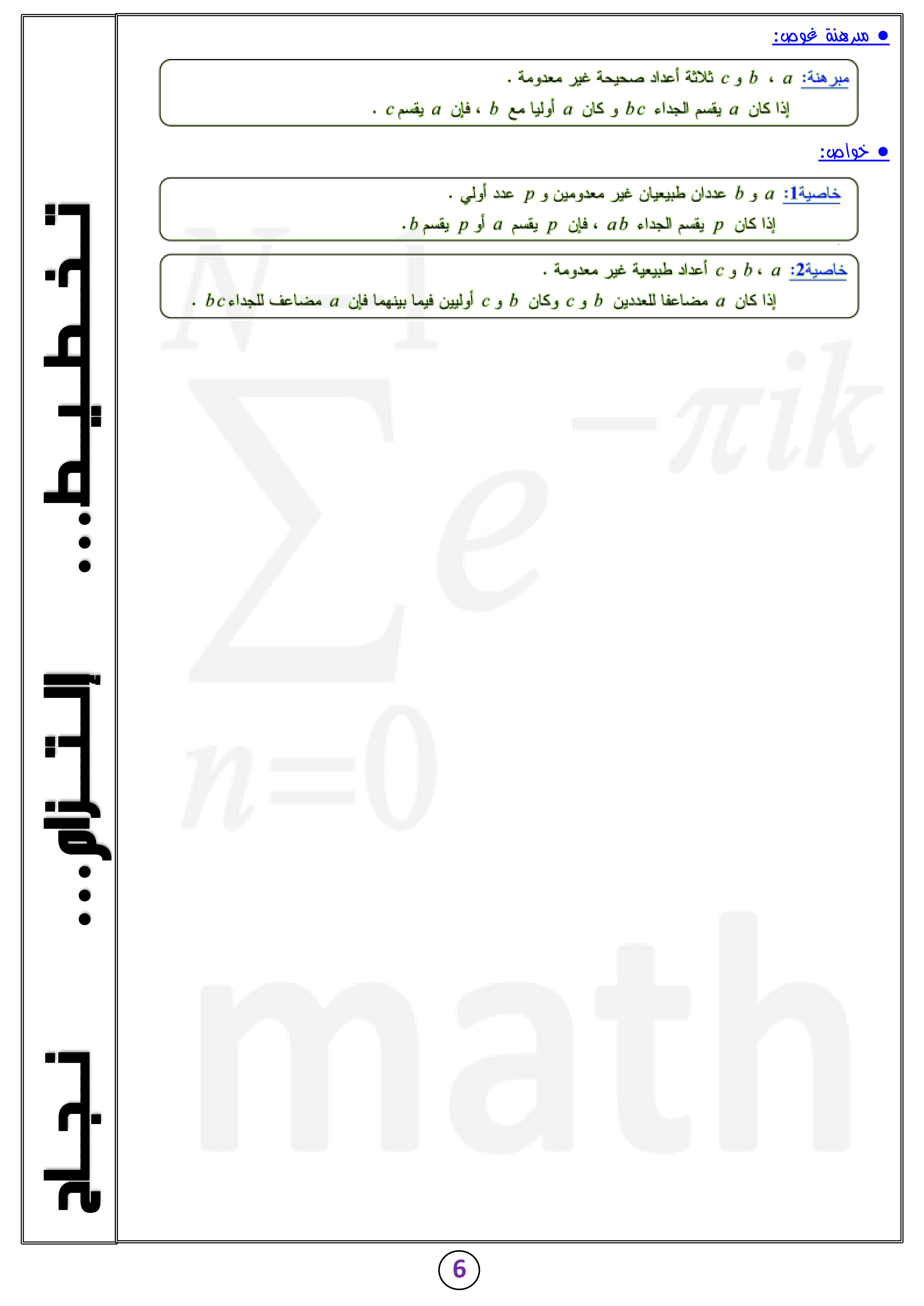
● خواص:

خاصية1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث :
$$au + bv = d$$

خاصية2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

خاصية3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

نجاح ... إلتزام ... تخطيط



● مبرهنة غوص:

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

● خواص:

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b.

خاصية2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .